Oefeningen voor het tentamen Algebra 2001

1 Laat G_1 en G_2 groepen zijn. Toon aan dat $G_1 \times G_2 \simeq G_2 \times G_1$.

2 Is de afbeelding $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, $A \mapsto A^2$ een groepshomomorfisme? Beredeneer je antwoord.

3 **(a)** Ga na dat

$$G := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbf{R}^*,\ b \in \mathbf{R}\}$$

een ondergroep van $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ is.

(b) Bewijs dat

$$H := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbf{R}\}$$

een normaaldeler van G is en dat $G/H \simeq \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.

4 Zij p een priemgetal, $n \in \mathbf{N}$ en $(G, \cdot, 1)$ een groep van orde $|G| = p^n$. Het **centrum** van G wordt met $\mathcal{Z}(G) := \{x \in G : ax = xa\ \forall a \in G\}$ aangeduid.

(a) Laat zien dat voor elke $y \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ het aantal elementen, $|C_G(y)|$, in de conjugatieklasse $C_G(y) := \{aya^{-1} : a \in G\}$ deelbaar is door p. Concludeer dat $|\mathcal{Z}(G)| = p^k$ met $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Neem nu $n = 2$, dus $|G| = p^2$. Stel dat $y \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$. Toon aan dat dan $\mathrm{ord}(y) = p$, $\langle y \rangle \cap \mathcal{Z}(G) = \{1\}$ en

$$\left|\{xy^k : x \in \mathcal{Z}(G),\ 0 \le k < p\}\right| = |\mathcal{Z}(G)| \cdot p \ge p^2 = |G|.$$

Concludeer dat G abels is.

(c) Bepaal (een aantal) groepen $G_1, \ldots, G_r$ van orde p^2 zodanig dat elke groep G van orde p^2 isomorf is aan precies één van hen.

5 Hoeveel conjugatieklassen heeft S_7? Hoeveel daarvan bevatten een even en hoeveel een oneven permutatie? Kan een conjugatieklasse ook even én oneven permutaties bevatten?

6 Hoe zijn de groepen A_n en D_n gedefinieerd? Toon aan dat $A_n \triangleleft S_n$ een normaaldeler is en dat D_n een normaaldeler van index 2 heeft.

7 **(a)** Bepaal alle conjugatieklassen en het centrum van A_4.

(b) Voor gegeven $n \in \mathbf{N}$, hoeveel elementen van orde n heeft A_4?

(c) Zij $N \triangleleft A_4$ een normaaldeler die een 3-cykel bevat. Laat zien dat N dan alle 3-cykels bevat en dus gelijk is aan A_4.

(d) Bepaal alle normaaldelers N van A_4, ga na of N ook een normaaldeler in S_4 is en zo ja, bepaal dan de structuur van de groep S_4/N.

(e) Laat $\sigma, \tau \in A_4$ twee verschillende maar aan mekaar geconjugeerde 3-cykels zijn. Gebruik $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \{(1)\}$ om aan te tonen dat $\left|\left\{\sigma^a\tau^b : -1 \le a, b \le 1\right\}\right| = 9$ en concludeer dat $\langle\sigma, \tau\rangle = A_4$.

(f) Bepaal alle automorfismen φ van A_4. Hoeveel ervan zijn van de vorm $\varphi = \gamma_\tau$ met $\tau \in A_4$?

8 Bepaal alle normaaldelers van $\mathbf{Z}/100\mathbf{Z}$.

9 Zij G de factorgroep $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ en $m \in \mathbf{N}$.

(a) Bewijs dat elk element van G eindige orde heeft.

(b) Is G eindig voortgebracht? Beredeneer je antwoord.

(c) Toon aan dat $G[m] := \{x \in G : mx = 0\}$ isomorf is met $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Concludeer dat G precies $\phi(m)$ elementen van orde m heeft.

10 Hoeveel onderling niet isomorfe abelse groepen van orde 36 zijn er. Bepaal voor elk van hen en voor alle delers d van 36 het aantal groepselementen van orde d.

11 Vind alle ondergroepen van de groep $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Hoeveel zijn dit er op isomorfie na? Voor gegeven $N \in \mathbf{N}$, hoeveel ondergroepen zijn er van index N?

12 Voor welke $n \in \mathbf{N}$ heeft A_n een element

(a) van orde 20?

(b) van orde 40?

Bewijs je bewering.

13 Geef een basis voor de groep

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^4 : a + 2b + 3c + 4d \in 6\mathbf{Z},\ 2a = 5b \right\}$$

en bepaal de structuur van $\mathbf{Z}^4/H$.